Univesitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea de Energetică
Catedra Electroenergetica

Soluționarea ecuațiilor neliniare

lect.univ. Victor Gropa
« Programarea si Utilizarea Calculatoarelor I »

Cuprins

- Separarea rădăcinilor ecuațiilor neliniare.
- Calculul rădăcinilor ecuațiilor neliniare cu precizia dată:
  - Metoda înjumătățirii intervalului.
  - Metoda iterațiilor.
  - Metoda Newton.

Ce este o ecuație neliniară ?

Ecuațiile neliniare cuprind toate ecuațiile cu excepția ecuațiilor algebrice de gradul I şi, de regulă, au forma:

$$f(x,P_1,P_2,...P_n)=0$$

unde:

- f – funcția dată;
- x – mărimea necunoscută;
- $P_1,P_2,...P_n$ – parametrii problemei.

Exemplu de ecuație neliniară: $3\cdot x^8-5\cdot x^7-6\cdot x^3-x-9=0$

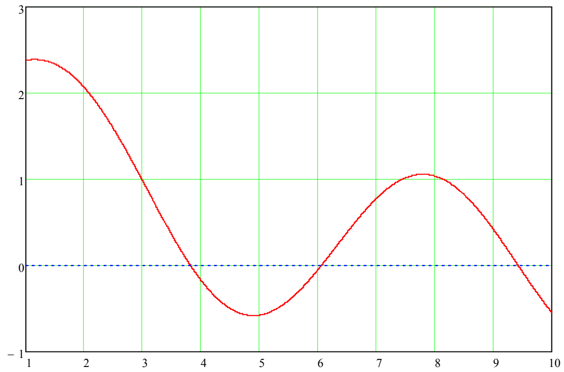
Cum se rezolvă ecuația neliniară ?

Soluționarea numerică a ecuațiilor neliniare se efectuează în două etape:

- *separarea rădăcinilor ecuației*, adică determinarea intervalelor de variație a variabilei **x**, care conțin câte o rădăcină;
- *determinarea rădăcinilor ecuației*, pentru o precizie dată.

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Considerăm funcția **f(x)** în intervalul **[$x_î$,x_s]**:



Exemplu grafic al funcției: $f(x) = \sin(x) + \cos(x^{1/2}) + 1$

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Conform teoremei **Bolzano-Caushy** rădăcinile ecuației se află în intervalele în care funcția f(x) îşi schimbă semnul.

Astfel, pentru diferite valori ale variabilei x ($x_î$,$x_î$+h,$x_î$+2h...) este necesar de a determina f(x), în scopul identificării intervalelor în care funcția îşi schimbă semnul.

Această modalitate necesită un volum mare de calcule şi se recomandă doar la determinarea aproximațiilor inițiale ale rădăcinilor.

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Se consideră o ecuație algebrică cu coeficienți reali $a_0, a_1, a_2 \ldots a_n$ ($a_0>0$):

$$a_0 \cdot x^m + a_1 \cdot x^{m-1} + a_2 \cdot x^{m-2} + \ldots + a_m \cdot x^0 = 0$$

Utilizând *relația lui Lagrange* poate fi determinată **limita superioară a rădăcinilor pozitive reale** (Rs^+):

$$Rs^+ = 1 + (B/a_0)^{1/k}$$

unde:

- B – valoarea maximă absolută din şirul coeficienților negativi ai polinomului;
- k – numărul primului coeficient negativ (k>=1).

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

- Utilizând ecuația auxiliară: $f_1(x) = x^m \cdot f(1/x)$

poate fi determinată **limita inferioară a rădăcinilor pozitive reale** ($Ri^+ = 1/R_1$);

- utilizând ecuația auxiliară: $f_2(x) = f(-x)$

poate fi determinată **limita superioară a rădăcinilor negative reale** ($Rs^- = -R_2$);

- utilizând ecuația auxiliară: $f_3(x) = x^m \cdot f(-1/x)$

poate fi determinată **limita inferioară a rădăcinilor negative reale** ($Ri^- = -1/R_3$).

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Toate rădăcinile pozitive reale ale ecuației algebrice vor satisface inegalitatea:

$$x^+ <= Rs^+$$

Dacă R_1, R_2, R_3 sunt limitele superioare ale rădăcinilor pozitive reale ale ecuațiilor auxiliare atunci se satisfac inegalitățile:

$$Ri^+ <= \mathbf{x^+} <= Rs^+$$

$$Rs^- <= \mathbf{x^-} <= Ri^-$$

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Se consideră ecuația (m=8):

$$3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 = 0$$

- $Rs^+ = 1 + (B/a_0)^{1/k} = 1 + (9/3)^{1/1} = 4.00$

  $f_1(x) = x^m \cdot f(1/x)$ -> $-(9 \cdot x^8 + x^7 + 6 \cdot x^5 + 5 \cdot x - 3) = 0$
- $Ri^+ = 1/[1 + (B/a_0)^{1/k}] = 1/[1 + (3/9)^{1/8}] = 1/1.87 = 0.53$

  $f_2(x) = f(-x)$ -> $3 \cdot x^8 + 5 \cdot x^7 + 6 \cdot x^3 + x - 9 = 0$
- $Rs^- = -[1 + (B/a_0)^{1/k}] = -[1 + (9/3)^{1/8}] = -2.15$

  $f_3(x) = x^m \cdot f(-1/x)$ -> $-(9 \cdot x^8 - x^7 - 6 \cdot x^5 - 5 \cdot x - 3) = 0$
- $Ri^- = -1/[1 + (B/a_0)^{1/k}] = -1/[1 + (6/9)^{1/1}] = -1/1.67 = -0.60$

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Determinarea limitelor pentru ecuația:

$$3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 = 0$$

a confirmat că se satisfac inegalitățile:

$$0.53 <= \mathbf{x^+} <= 4.00$$

$$-2.15 <= \mathbf{x^-} <= -0.60$$

După **determinarea limitelor intervalelor** ce conțin rădăcinile ecuației neliniare poate fi demarată **etapa de separare a rădăcinilor**.

Separarea rădăcinilor ecuațiilor

Exemplu de algoritm de separare a rădăcinilor:

```
ORIGIN:= 1

F(x) := | f ← 3·x^8 − 5·x^7 − 6·x^3 − x − 9
        | f

Seprad(Rip, Rsp, eps) := | i ← 1
                         | x ← Rip
                         | F1 ← F(x)
                         | while  x < Rsp
                         |    | x ← x + eps
                         |    | if  F1·F(x) ≤ 0
                         |    |    | v_i ← x − eps
                         |    |    | v_(i+1) ← x
                         |    |    | i ← i + 2
                         |    |    | F1 ← F(x)
                         | v

Seprad2(Rsn, Rin, eps) := | i ← 1
                          | x ← Rsn
                          | F1 ← F(x)
                          | while  x < Rin
                          |    | x ← x + eps
                          |    | if  F1·F(x) ≤ 0
                          |    |    | v_i ← x − eps
                          |    |    | v_(i+1) ← x
                          |    |    | i ← i + 2
                          |    |    | F1 ← F(x)
                          | v
```

$\text{Seprad}(0.53, 4, 0.1)^T = (1.83 \quad 1.93)$

$\text{Seprad}(0.53, 4, 0.0001)^T = (1.874 \quad 1.874)$

$\text{Seprad2}(-2.15, -0.6, 0.1)^T = (-0.95 \quad -0.85)$

$\text{Seprad2}(-2.15, -0.6, 0.00001)^T = (-0.901 \quad -0.901)$

Metoda înjumătățirii intervalului

Exemplu de aplicare a metodei:

$$ORIGIN := 1$$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow 3\cdot x^{8} - 5\cdot x^{7} - 6\cdot x^{3} - x - 9 \\ f \end{array} \right.$$

$$MINJ(xi, xs, eps) := \left| \begin{array}{l} \text{while } |xs - xi| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \dfrac{xi + xs}{2} \\ xi \leftarrow x \text{ if } F(x)\cdot F(xi) > 0 \\ xs \leftarrow x \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$$MINJ(1.83, 1.93, 0.0001) = 1.874$$

$$MINJ(-0.95, -0.85, 0.0001) = -0.901$$