Univesitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea de Energetică
Catedra Electroenergetica

Soluționarea ecuațiilor neliniare

lect.univ. Victor Gropa

« Programarea si Utilizarea Calculatoarelor I »

Cuprins

- Metoda înjumătățirii intervalului
- Metoda coardei
- Metoda iterațiilor
- Metoda Newton

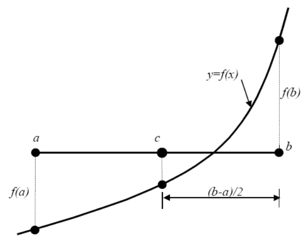
Metoda înjumătățirii intervalului (metoda bisecției)

Presupune că funcția **f(x)** este *continuă* pe intervalul compact **[a,b]** şi are *valori de semne opuse* la capetele intervalului:

$$f(a)\cdot f(b)<0$$

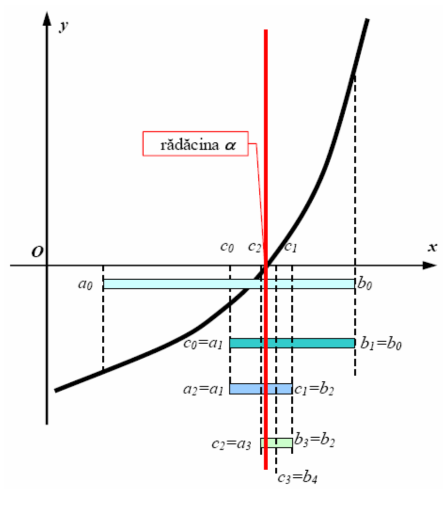
În aceste condiții rezultă că ecuația **f(x)=0** are cel puțin o rădăcină **α** în interiorul intervalului **[a,b]**.

Algoritmul prevede *înjumătățirea continuă* a intervalului de separare a rădăcinii şi *determinarea* de fiecare dată a *părții*, care conține rădăcina.



Procedura continuă până când lățimea intervalului curent **|b-a|** nu devine mai mică decât precizia dată **ε**.

Metoda înjumătățirii intervalului



Este o metodă sigură (robustă) de determinare a unei aproximații grosiere a poziției unei rădăcini reale.

Pentru rafinarea soluției această metodă nu este comodă, conducând la un număr mare de iterații.

De exemplu, este posibil ca la o anumită iterație să fim aproape de soluție, iar la pasul următor să ne îndepărtăm de ea.

Metoda înjumătățirii intervalului

Se consideră ecuația: $3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 = 0$

$ORIGIN := 1$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow 3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 \\ f \end{array} \right.$$

$$MINJ(xi, xs, eps) := \left| \begin{array}{l} \text{while } |xs - xi| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \dfrac{xi + xs}{2} \\ xi \leftarrow x \text{ if } F(xi) \cdot F(x) > 0 \\ xs \leftarrow x \text{ otherwise} \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

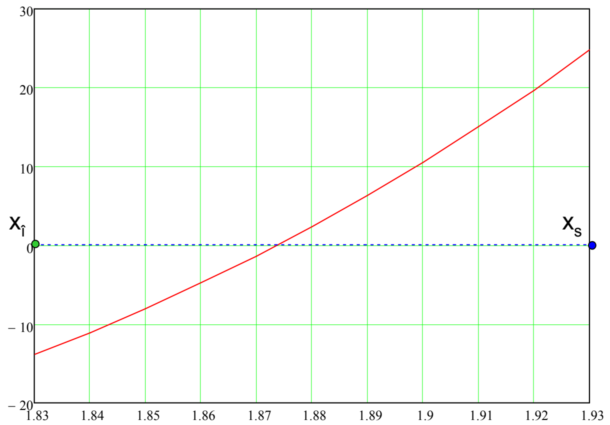
$MINJ(1.83, 1.93, 0.01) = 1.874$

Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 0:

$xi := 1.83$ $\quad F(xi) = -13.922$

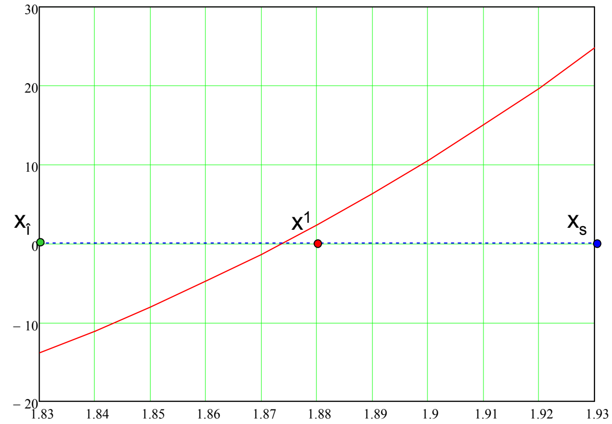
$xs := 1.93$ $\quad F(xs) = 24.736$ $\quad xs - xi = 0.1$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 1:

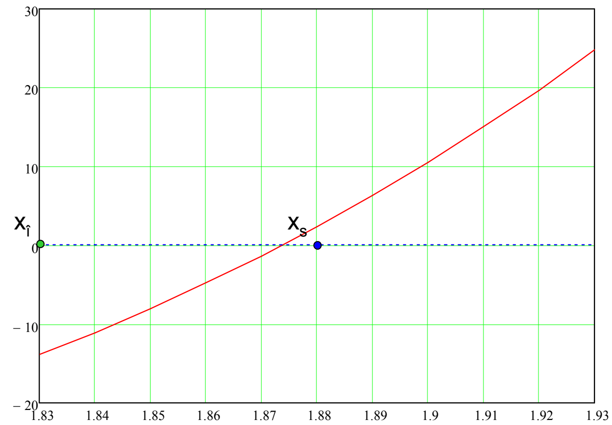
$x1 := \frac{xi + xs}{2} = 1.88$ $F(x1) = 2.375$ $F(x1) \cdot F(xi) = -33.069$ $xs := x1$ $xs - xi = 0.05$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 2:

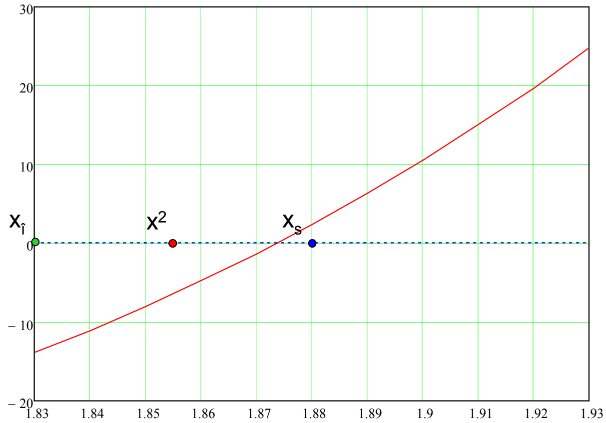
$x2 := \frac{xi + xs}{2} = 1.855$ $F(x2) = -6.451$ $F(x2) \cdot F(xi) = 89.811$ $xi := x2$ $xs - xi = 0.025$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 2:

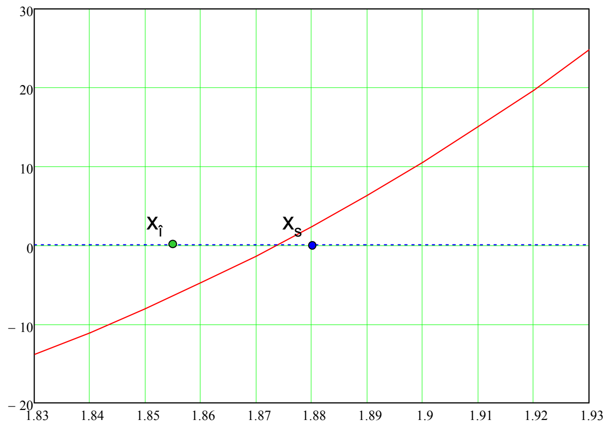
$x2 := \dfrac{xi + xs}{2} = 1.855$ $F(x2) = -6.451$ $F(x2)\cdot F(xi) = 89.811$ $xi := x2$ $xs - xi = 0.025$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 3:

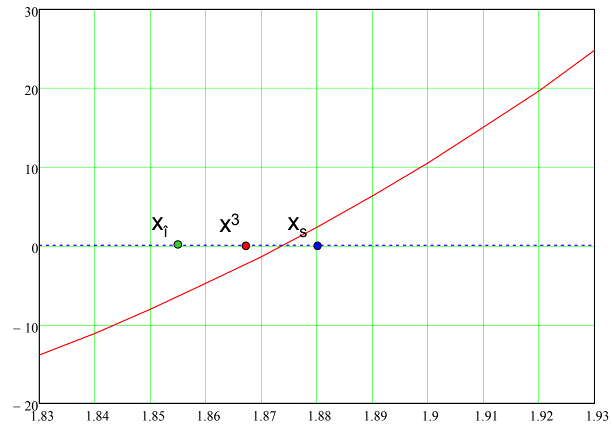
$x3 := \dfrac{xi + xs}{2} = 1.867$ $F(x3) = -2.217$ $F(x3)\cdot F(xi) = 14.299$ $xi := x3$ $xs - xi = 0.012$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 3:

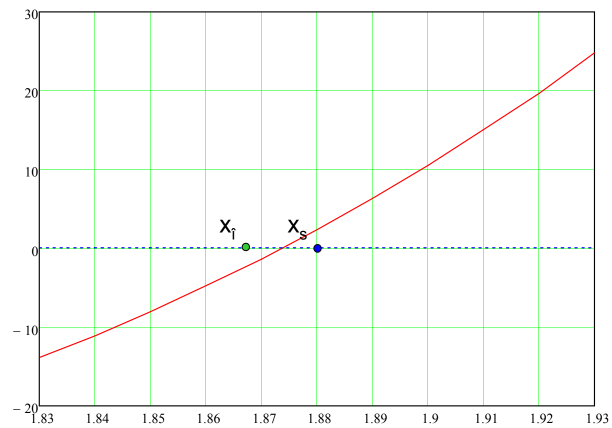
$x3 := \frac{xi + xs}{2} = 1.867 \qquad F(x3) = -2.217 \qquad F(x3)\cdot F(xi) = 14.299 \qquad xi := x3 \qquad xs - xi = 0.012$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 4:

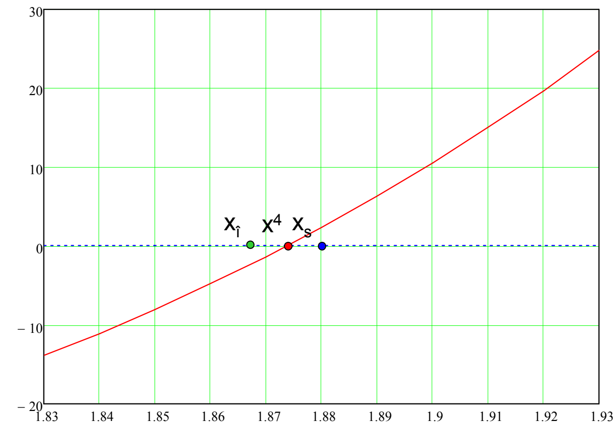
$x4 := \frac{xi + xs}{2} = 1.874 \qquad F(x4) = 0.033 \qquad F(x4)\cdot F(xi) = -0.074 \qquad xs := x4 \qquad xs - xi = 0.006$



Metoda înjumătățirii intervalului

Pasul 4:

$x4 := \frac{xi + xs}{2} = 1.874 \qquad F(x4) = 0.033 \qquad F(x4)\cdot F(xi) = -0.074 \qquad xs := x4 \qquad xs - xi = 0.006$

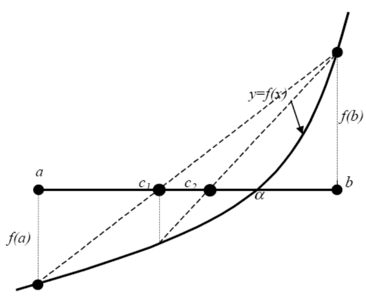


Metoda coardei (metoda poziției false)

Ca în metoda înjumătățirii intervalului presupunem că avem două numere **a<b** care reprezintă intervalul ce conține rădăcina.

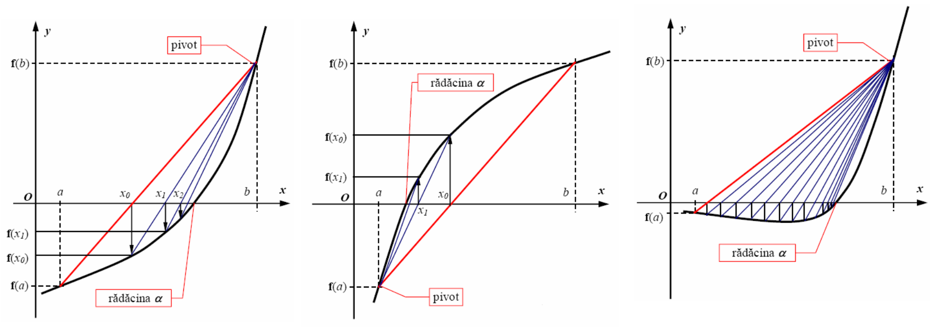
Se ia ca aproximație a rădăcinii, intersecția cu axa **x** a dreptei care uneşte punctele **{a,f(a)}** şi **{b,f(b)}**.

Se consideră intervalul în care funcția **f(x)** ia valori de semne opuse şi procedeul continuă, până când lățimea intervalului curent **|b-a|** nu devine mai mică decât precizia **ε**.



Dezavantaje: convergență lentă; faptul că unul din capete poate rămâne fix (convergență lentă pentru cazul când **a** este aproape de **α**, **b** este depărtat, iar funcția **f(x)** este turtită în apropierea rădăcinii).

Metoda coardei



Metoda coardei asigură găsirea soluției în mai puține iterații decât metoda înjumătățirii intervalului, dar nu întotdeauna.

Metoda coardei

Se consideră ecuația: $3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 = 0$

$ORIGIN := 1$

$$F(x) := \left|\begin{array}{l} f \leftarrow 3 \cdot x^8 - 5 \cdot x^7 - 6 \cdot x^3 - x - 9 \\ f \end{array}\right.$$

$$MC(xi, xs, eps) := \left|\begin{array}{l} \text{while } |xs - xi| > eps \\ \quad \left|\begin{array}{l} x \leftarrow xi - \dfrac{xi - xs}{F(xi) - F(xs)} \cdot F(xi) \\ xi \leftarrow x \text{ if } F(xi) \cdot F(x) > 0 \\ xs \leftarrow x \text{ otherwise} \end{array}\right. \\ x \end{array}\right.$$

$MC(1.83, 1.93, 0.01) = 1.874$

Metoda coardei

Pasul 0: $xi := 1.83$ $\quad F(xi) = -13.922$

$xs := 1.93$ $\quad F(xs) = 24.736$ $\quad xs - xi = 0.1$

Pasul 1:

$x1 := xi - \dfrac{xi - xs}{F(xi) - F(xs)} \cdot F(xi) = 1.866$ $\quad F(x1) = -2.738$ $\quad F(x1) \cdot F(xi) = 38.126$ $\quad xi := x1$ $\quad xs - xi = 0.064$

Pasul 2:

$x2 := xi - \dfrac{xi - xs}{F(xi) - F(xs)} \cdot F(xi) = 1.872$ $\quad F(x2) = -0.463$ $\quad F(x2) \cdot F(xi) = 1.269$ $\quad xi := x2$ $\quad xs - xi = 0.058$

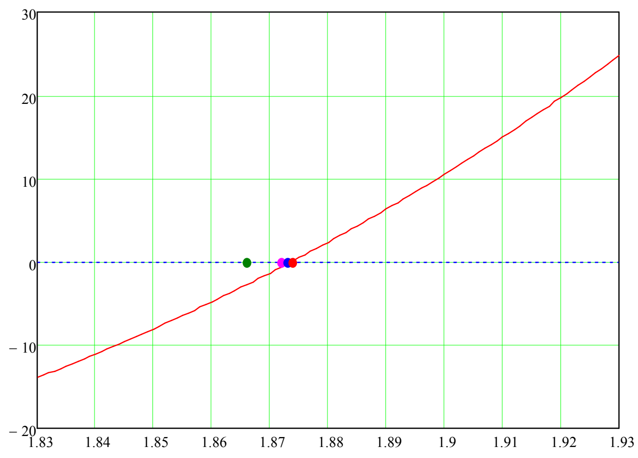
Pasul 3:

$x3 := xi - \dfrac{xi - xs}{F(xi) - F(xs)} \cdot F(xi) = 1.873$ $\quad F(x3) = -0.076$ $\quad F(x3) \cdot F(xi) = 0.035$ $\quad xi := x3$ $\quad xs - xi = 0.057$

Pasul 4:

$x4 := xi - \dfrac{xi - xs}{F(xi) - F(xs)} \cdot F(xi) = 1.874$ $\quad F(x4) = -0.013$ $\quad F(x4) \cdot F(xi) = 0.001$ $\quad xs := x4$ $\quad xs - xi = 0$

Metoda coardei



Metoda iterațiilor
(metoda aproximațiilor succesive)

Această metodă se bazează pe principul contracției şi presupune găsirea iterativă a rădăcinii unei ecuații echivalente pentru ecuația inițială **f(x)=0**:

x=g(x),

unde funcția **g(x)=x-f(x)** se numeşte *iterată*.

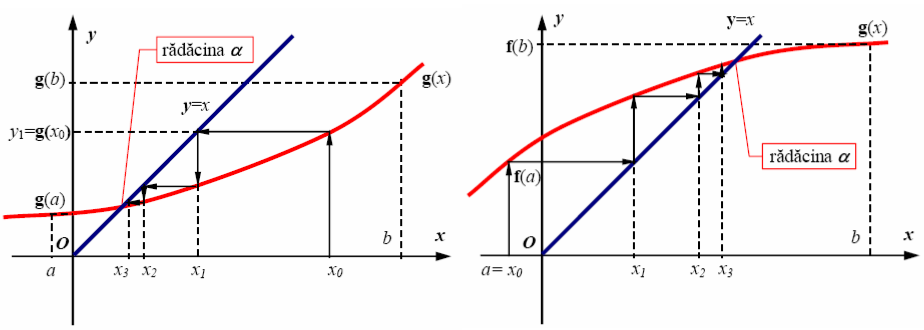
Evident că rădăcina **α** a ecuației **f(x)=0** va satisface şi ecuația:

α =g(α).

Metoda nu converge dacă derivata ecuației echivalente este mai mare de **1** pentru orice **x** din intervalul de separare a rădăcinii.

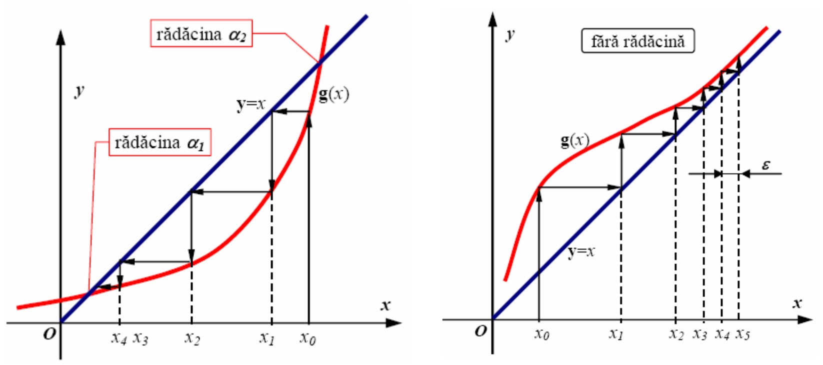
Totodată, cu cât valoarea maximă a derivatei ecuației echivalente este mai mică, cu atât mai repede converge procesul.

Metoda iterațiilor



Din punct de vedere geometric prin această metodă se determină rădăcina ca intersecție a graficului funcției **g(x)** cu prima bisectoare.

Metoda iterațiilor



Cazuri de excepție la aplicarea metodei iterațiilor.

Metoda iterațiilor

$3\cdot x^8 - 5\cdot x^7 - 6\cdot x^3 - x - 9 := 0$ $\qquad$ $x := 3\cdot x^8 - 5\cdot x^7 - 6\cdot x^3 - 9$

```
ORIGIN := 1
Fi(x) := | f ← 3x^8 − 5x^7 − 6x^3 − 9
         | f

DFi(xi, xs, eps) := | x ← xi
                    | while  x < xs
                    |    | i ← i + 1
                    |    | A_i ← |d/dx Fi(x)|
                    |    | x ← x + eps
                    | A

max(DFi(1.83, 1.93, 0.01)) = 488.714

MIT(xi, xs, eps) := | if  max(DFi(xi, xs, eps)) < 1
                    |    | x ← xi + 2·eps
                    |    | while  |x − xi| > eps
                    |    |    | x ← xi
                    |    |    | xi ← Fi(xi)
                    |    | xi
                    | "inconvergenta"      otherwise

MIT(1.83, 1.93, 0.01) = "inconvergenta"
```

Metoda iterațiilor

atan(x) + 1 − x := 0 x := atan(x) + 1

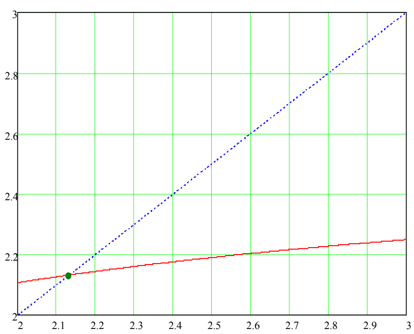
```
ORIGIN := 1
Fi(x) := | f ← atan (x) + 1
         | f

DFi(xi, xs, eps) := | x ← xi                          max(DFi(2, 3, 0.01)) = 0.2
                    | while  x < xs
                    |    | i ← i + 1
                    |    | A_i ← |d/dx Fi(x)|
                    |    | x ← x + eps
                    | A

MIT (xi, xs, eps) := | if  max(DFi(xi, xs, eps)) < 1  MIT (2, 3, 0.01) = 2.131
                     |    | x ← xi + 2·eps
                     |    | while  |x − xi| > eps
                     |    |    | x ← xi
                     |    |    | xi ← Fi(xi)
                     |    | xi
                     | "inconvergenta"       otherwise
```

Metoda iterațiilor

f(x)=arctg(x)+1-x

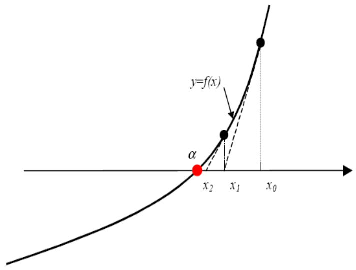


g(x)=arctg(x)+1

Metoda Newton-Raphson (metoda tangentei)

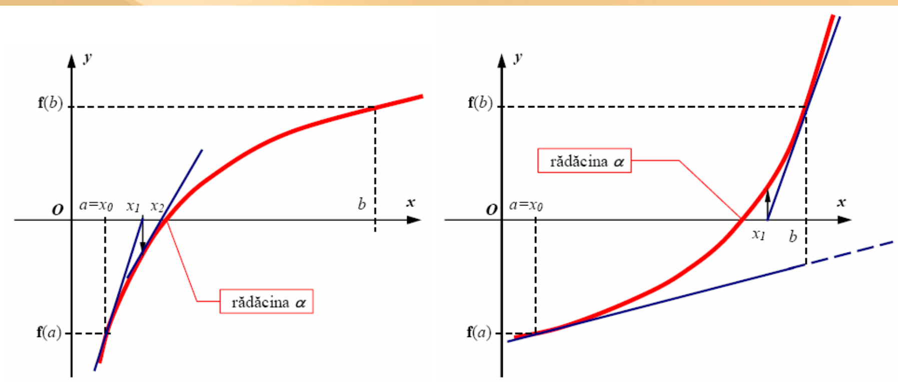
Metoda poate fi aplicată în cazul în care *derivatele* funcției f(x) – **f’(x)** şi **f’’(x)** sunt *determinate*, *continue* şi *îşi păstrează semnul* în intervalul de separare a rădăcinii.

Graficul funcției f(x) se înlocuieşte cu tangenta la graficul funcției în $\mathbf{x_0}$ (aproximația inițiala presupusă cunoscută), intersecția tangentei cu axa **x** este luată ca aproximație următoare $\mathbf{x_1}$ a rădăcinii. Procedeul continua cu $\mathbf{x_1}$ astfel determinat.



Un dezavantaj al metodei îl prezintă necesitatea calculului la fiecare pas de iterație a derivatei funcției **f(x)**.

Metoda Newton-Raphson



Este recomandabil pornirea procesului iterativ din acea extremitate a intervalului **[a,b]** care satisface condiția:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0.$$

Metoda Newton-Raphson

ORIGIN := 1

$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow 3\cdot x^8 - 5\cdot x^7 - 6\cdot x^3 - x - 9 \\ f \end{array} \right.$

$$MN(xi, xs, eps) := \left| \begin{array}{l} x \leftarrow \left| \begin{array}{ll} xs & \text{if } F(xs)\cdot\frac{d^2}{dxs^2}F(xs) > 0 \text{ if } xi < xs \\ xi & \text{otherwise} \end{array} \right. \\ T \leftarrow 2\cdot eps \\ \text{while } |T| > eps \\ \quad \left| \begin{array}{l} T \leftarrow \dfrac{F(x)}{\frac{d}{dx}F(x)} \\ x \leftarrow x - T \end{array} \right. \\ x \end{array} \right.$$

$xi := 1.83 \qquad F(xi)\cdot\frac{d^2}{dxi^2}F(xi) = -26925.1$

$MN(1.83, 1.93, 0.01) = 1.874$

$xs := 1.93 \qquad F(xs)\cdot\frac{d^2}{dxs^2}F(xs) = 73953.251$

Întrebări ?