Univesitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea de Energetică
Catedra Electroenergetica

Soluționarea sistemelor de ecuații algebrice liniare

lect.univ. Victor Gropa

« Programarea si Utilizarea Calculatoarelor I »

Cuprins

- Sisteme de ecuații algebrice liniare
- Metode directe de soluționare
  - *Metoda eliminării a lui Gauss*
- Metode iterative de soluționare
  - *Metoda lui Gauss-Seidel*

Sisteme de ecuații algebrice liniare

Considerăm sistemul de ecuații algebrice liniare:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Acest sistem poate fi scris sub formă matricială:

$$Ax = b,$$

unde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

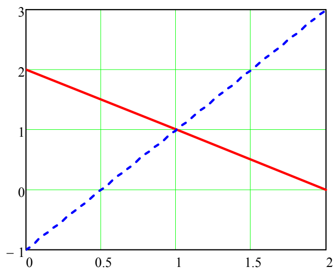
A rezolva sistemul de ecuații dat înseamnă a determina toate necunoscutele x din sistemul de ecuații prezentat.

Sisteme de ecuații algebrice liniare

<u>Pentru orice sistem de ecuații liniare pot exista 3 posibilități:</u>

1. Sistemul de ecuații are o soluție unică *(*în acest caz se spune că sistemul este *compatibil determinat).*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$



ORIGIN:= 1

$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

$B := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

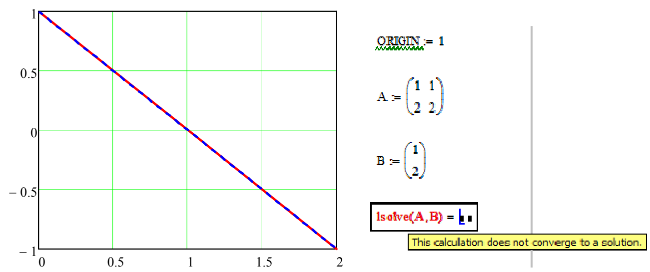
$\text{lsolve}(A, B) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Se observă că dreptele se intersectează numai într-un punct.

Sisteme de ecuații algebrice liniare

2. Sistemul de ecuații are o infinitate de soluții *(*în acest caz se spune că sistemul este *compatibil nedeterminat).*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}$$

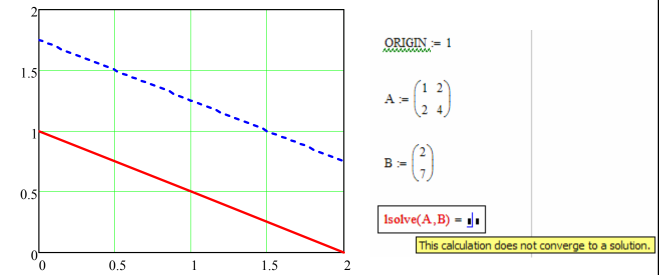


Se observă că soluțiile descriu una şi aceeaşi dreaptă.

Sisteme de ecuații algebrice liniare

3. Sistemul de ecuații nu are soluții (adică este *incompatibil).*

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + 4x_2 = 7 \end{cases}$$



Se observă că dreptele sunt paralele.

Sisteme de ecuații algebrice liniare

Dacă determinantul matricii A este diferit de 0 (matricea este nesingulară), atunci sistemul de ecuații este compatibil determinat. Soluția sistemului poate fi scrisă sub forma:

$$x = A^{-1} b$$

Există două clase de metode de rezolvare a sistemelor algebrice liniare:

- metode directe sau exacte, care furnizează soluția într-un număr finit de paşi, în ipoteza că toate calculele se fac exact (Cramer, eliminarea gaussiană, Cholesky) şi
- metode iterative, care aproximează soluția generând un şir care converge către aceasta (Jacobi, Gauss-Seidel, SOR).

Metoda eliminării a lui Gauss

Metoda constă în eliminarea succesivă a necunoscutelor într-o manieră care conduce la un număr de operații mult mai redus decât procedeul care ar utiliza regula lui Cramer şi calculul determinanților corespunzători.

Metoda eliminării a lui Gauss are două etape:

- transformarea sistemului dat într-unul echivalent, triunghiular;
- rezolvarea sistemului triunghiular prin substituție inversă.

Elementul $a_{i,i}$ plasat pe diagonala principală se numeşte *pivot.*

Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855)

A fost unul dintre cei mai mari matematicieni ai secolului al nouăsprezecelea şi probabil ai tuturor timpurilor. A trăit aproape toată viaţa în Gottingen, unde a fost directorul observatorului astronomic 40 de ani. În timpul studenției la Gottingen, Gauss a descoperit că poligonul cu 17 laturi poate fi construit cu rigla şi compasul, rezolvând astfel o problemă deschisă a antichității.

A avut contribuții fundamentale în teoria numerelor, geometrie diferențială şi neeuclidiană, funcţii eliptice şi hipergeometrice, mecanică cerească şi geodezie şi diverse ramuri ale fizicii, în special magnetism şi optică.

Lucrările lui Gauss în domeniul cuadraturilor numerice continuă munca predecesorilor săi Newton şi Cotes.

Metoda eliminării a lui Gauss

<u>Exemplu:</u>

ORIGIN := 1 $\quad A := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 \\ 3 & 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \quad n := \text{length}(b) = 4$

```
MTG(a, n) := | for  i ∈ 1..n − 1
             |    c ← a[i,i]
             |    for  j ∈ i..n + 1
             |       a[i,j] ← a[i,j] / c
             |    for  k ∈ i + 1..n
             |       D ← a[k,i]
             |       for  h ∈ i..n + 1
             |          a[k,h] ← a[k,h] − a[i,h]·D
             | a
```

```
SOL(b) := | x[n] ← b[n,n+1] / b[n,n]
          | k ← n − 1
          | while  k > 0
          |    s ← 0
          |    for  j ∈ k + 1..n
          |       s ← s + b[k,j]·x[j]
          |    x[k] ← b[k,n+1] − s
          |    k ← k − 1
          | x
```

$C := \text{augment}(A, b) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & -3 & 5 \\ -1 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{MTG}(C, n) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1.5 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1.304 & -0.609 \\ 0 & 0 & 0 & 496 & -232 \end{pmatrix}$

$\text{SOL}(\text{MTG}(C, n))^T = (1.665 \quad -0.067 \quad 0.001 \quad -0.468)$

$1.665 + 3\cdot(-0.067) + 2\cdot 0.001 + (-0.468) = 0.998$

Metoda lui Gauss-Seidel

Principiul general al metodelor iterative poate fi prezentat prin analogie cu metoda iterației simple de rezolvare a ecuației *F(x) = 0*, în care ecuația originală este transcrisă ca:

$$x = f(x)\,,$$

ce conduce la procedeul iterativ:

$$x_{k+1} = f(x_k)$$

În această metodă, ideea constă în a folosi noile valori ale componentelor vectorului necunoscutelor $x^{(k+1)}$ imediat ce au fost calculate.

Procesul de iterație se va întrerupe când se va satisface condiția:

$$|x^{(i+1)} - x^{(i)}| \le \varepsilon$$

Metoda lui Gauss-Seidel

Exemplu:

ORIGIN := 1

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 & 0 \\ 5 & 10 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 8 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} \quad b := \begin{pmatrix} -1 \\ -13 \\ 12 \\ 8 \end{pmatrix}$$

eps := 0.001

n := length(b) = 4

$$D := \text{augment}(A, b) = \begin{pmatrix} 8 & 5 & -2 & 0 & -1 \\ 5 & 10 & -2 & 2 & -13 \\ -2 & -2 & 8 & 2 & 12 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

```
SDEI(a, x, n, eps) := | L ← 0
                      | while L = 0
                      |   | L ← 1
                      |   | for k ∈ 1..n
                      |   |   | s ← a[k,n+1]
                      |   |   | for j ∈ 1..n
                      |   |   |   s ← s − a[k,j]·x[j]
                      |   |   | s ← s / a[k,k]
                      |   |   | x[k] ← x[k] + s
                      |   |   | L ← 0 if |s| ≥ eps
                      | x
```

$$\text{SDEI}(D, x, n, eps)^T = (1.543 \quad -2.378 \quad 0.726 \quad 2.261)$$

$$8 \cdot 1.543 + 5 \cdot (-2.378) - 2 \cdot 0.726 + 0 = -0.998$$