Univesitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea de Energetică
Catedra Electroenergetica

Calculul integralelor definite

lect.univ. Victor Gropa
« Programarea si Utilizarea Calculatoarelor I »

© TemplatesWise.com

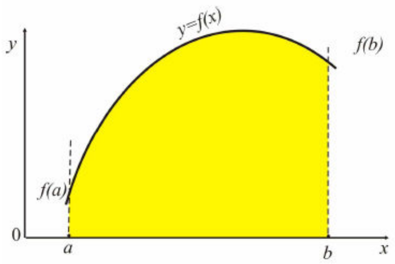
Cuprins

- Metoda Dreptunghiurilor
- Metoda Trapezelor
- Metoda Simpson

Integrare numerică

Fie că se cere de a determina valoarea integralei definite (aria trapezului curbiliniu, determinat de axa 0X, dreptele y=a şi y=b şi graficul funcției subintegrale f(x) pe intervalul [a,b]):

$$J = \int_a^b f(x)\,dx$$



unde *a* este limita de integrare de jos;
b – limita de integrare de sus;
f(x) – funcția subintegrală, continuă pe intervalul [a,b].

La integrarea numerică se recurge în acele cazuri, când pentru funcția subintegrală f(x), primitiva nu poate fi exprimată prin funcții elementare.

Integrare numerică

Esența majorității metodelor numerice de calcul a integralelor definite constă în *înlocuirea funcției subintegrale f(x) cu o funcție aproximativă* ϕ(x), pentru care primitiva poate fi exprimată prin funcții elementare:

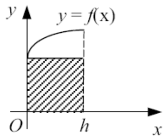
$$J = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \phi(x)\,dx + R = S + R$$

unde *S* este valoarea aproximativă a integralei;
R – eroarea de calcul.

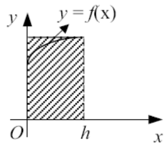
Metodele de integrare numerică, utilizate în practică, pot fi grupate în dependență de modalitatea de aproximare a funcției subintegrale f(x). Metodele Newton-Cotes sunt bazate pe aproximarea polinomială a f(x).

Metoda Dreptunghiurilor

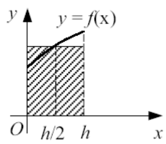
Esența metodei dreptunghiurilor constă în aceea că funcția subintegrală f(x) este înlocuită în fiecare subinterval de integrare cu **o constantă** (un polinom de gradul 0).



De remarcat că constanta respectivă poate lua orice valoare din şirul valorilor funcției subintegrale pe subintervalul dat. Din aceste considerente există diferite variații ale metodei dreptunghiurilor.



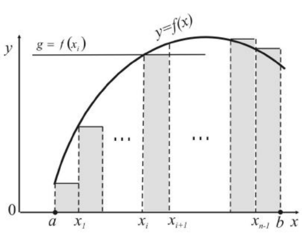
Astfel, suma ariilor dreptunghiurilor reprezintă valoarea aproximativă a integralei.



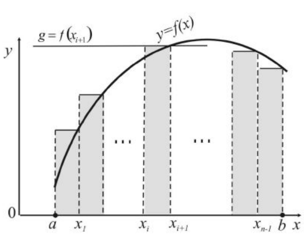
Metoda dreptunghiurilor este cea mai simplă din Metodele Newton-Cotes.

Metoda Dreptunghiurilor

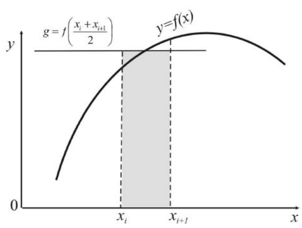
Variații ale metodei dreptunghiurilor sunt:



Metoda dreptunghiurilor de stânga.



Metoda dreptunghiurilor de dreapta.



Metoda dreptunghiurilor de mijloc (medii).

O eroare minimală o are metoda dreptunghiurilor medii.

Metoda Dreptunghiurilor

Algoritmul de aplicare pentru metoda dreptunghiurilor medii este:

Pas 1 Se introduc limitele de integrare a,b şi numărul de divizări n.

Pas 2 Se calculează pasul de deplasare h.

Pas 3 Pornind de la limita de integrare de jos a se calculează mijlocul fiecărui segment elementar şi ariile dreptunghiurilor elementare.

Pas 4 Se sumează ariile elementare.

Metoda Dreptunghiurilor

Exemplu:

$$y = \int_1^3 \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow \dfrac{e^x}{x} \\ f \end{array} \right.$$

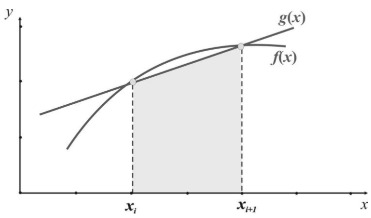
$$DREPT(a,b,n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ y \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad y \leftarrow y + h \cdot F\left[a + (i-1)\cdot h + \dfrac{h}{2}\right] \\ y \end{array} \right.$$

$$DREPT(1,3,1000) = 8.039$$

Metoda Trapezelor

Un neajuns al metodei dreptunghiurilor este numărul mare de divizări, necesare pentru obținerea unor rezultate cu erori de calcul suficient de mici. Este logică aproximarea mai exactă a integralei prin alte figuri geometrice, aria cărora poate fi calculată prin formule. Una din figurile, care permit acest lucru este **trapezul**.

Aproximarea integralei definite prin un set de trapeze corespunde aproximării funcției *f(x)* cu un polinom Lagrange de gradul 1 *g(x)* (o funcție liniară care trece prin nodurile de interpolare).



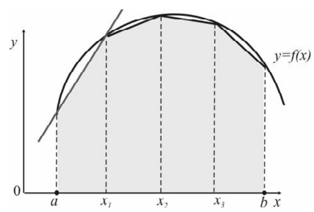
Metoda Trapezelor

Ecuația polinomului de gradul 1 *g(x)* este dată de formula:

$$g(x) = \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} f(x_{i+1}) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} f(x_i)$$

unde x_i si x_{i+1} sunt punctele în care valorile funcțiilor *f(x)* şi *g(x)* coincid.

Pe segmentul elementar [x_i, x_{i+1}] trapezul este determinat de extremitățile segmentului pe axa 0X (x_i, 0) (x_{i+1}, 0) şi de valoarea funcției f(x) în extremități: (x_i, $f(x_i)$) (x_{i+1}, $f(x_{i+1})$).



Pentru aplicarea metoda trapezelor, este necesar ca funcția integrală să fie de două ori derivabilă.

Metoda Trapezelor

Algoritmul de aplicare pentru metoda trapezelor:

Pas 1 Se introduc limitele de integrare a,b şi numărul de divizări n.

Pas 2 Se calculează pasul de deplasare h.

Pas 3 Pornind de la limita de integrare de jos a se calculează valoarea funcției în extremitățile fiecărui segment elementar şi ariile trapezelor elementare.

Pas 4 Se sumează ariile elementare.

Metoda Trapezelor

Exemplu:

$$y = \int_1^3 \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow \dfrac{e^x}{x} \\ f \end{array} \right.$$

$$TRAP(a,b,n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ y \leftarrow 0 \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad y \leftarrow y + h\cdot\dfrac{[F[a+(i-1)\cdot h] + F(a+i\cdot h)]}{2} \\ y \end{array} \right.$$

$$TRAP(1,3,1000) = 8.039$$

Metoda Simpson

Esența metodei dreptunghiurilor constă în aceea că funcția subintegrală f(x) este înlocuită în subintervalul de integrare cu **o parabolă** (un polinom de gradul 2) ce trece prin nodurile (x_a, f_a), (x_1, f_1), (x_b, f_b), unde x_1 este mijlocul subintervalului [a,b].

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b P_2(x)\,dx + R$$

Calculând integrala de la polinomul de gradul 2 (format în baza relației lui Newton pentru 3 noduri) în subintervalul de integrare obținem **relația lui Simpson**.

$$\int_a^{a+2h} P_2(x)\,dx = \left(f_a + 4f_1 + f_b\right)\frac{h}{3}$$

Metoda Simpson

Exemplu:

$$y = \int_1^3 \frac{e^x}{x}\,dx$$

$$F(x) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow \dfrac{e^x}{x} \\ f \end{array} \right.$$

$$SYMP(a,b,n) := \left| \begin{array}{l} h \leftarrow \dfrac{b-a}{2n} \\ x \leftarrow a + h \\ y \leftarrow F(a) - F(b) \\ \text{for } i \in 1..n \\ \quad \left| \begin{array}{l} y \leftarrow y + 4F(x) + 2F(x+h) \\ x \leftarrow x + 2 \cdot h \end{array} \right. \\ y \leftarrow y \cdot \dfrac{h}{3} \\ y \end{array} \right.$$

$$SYMP(1,3,1000) = 8.039$$

$$\int_{1}^{3} \frac{e^{x}}{x}\, dx = 8.039$$

Întrebări ?