Univesitatea Tehnică a Moldovei
Facultatea de Energetică
Catedra Electroenergetica

Integrarea ecuațiilor diferențiale obişnuite

lect.univ. Victor Gropa

« Programarea si Utilizarea Calculatoarelor I »

Cuprins

- Ecuații diferențiale ordinare
- Metoda Euler
- Metoda Runge-Kutta

Ecuații diferențiale ordinare

Ecuațiile diferențiale ordinare (sau ecuațiile diferențiale care conțin ca necunoscute *funcții* care depind de o singură *variabilă* independentă) se întâlnesc în mod curent în descrierea fenomenelor din natură.

Funcțiile necunoscute pot fi viteze, temperaturi, densități, sarcini electrice, etc.

Variabila independentă este în multe cazuri timpul, când se descriu fenomene evolutive, sau o coordonată spațială, când se descriu fenomene unidimensionale.

În ecuațiile diferențiale apar derivatele de diverse ordine ale funcțiilor necunoscute. Ordinul cel mai mare al derivatei funcției necunoscute dă *ordinul ecuației diferențiale*.

Ecuații diferențiale ordinare

Dacă avem un sistem de ecuații diferențiale (adică mai multe ecuații care conțin mai multe funcții necunoscute, în număr egal cu numărul ecuațiilor diferențiale), *ordinul sistemului* este egal cu suma ordinelor ecuațiilor diferențiale care îl formează.

În general, ecuația diferențială nu determină complet funcția necunoscută. Pentru a determina complet soluția, este necesar ca, odată cu ecuația să se impună un număr de condiții suplimentare egal cu ordinul ecuației diferențiale (problema Cauchy).

Trebuie spus că, rezolvarea ecuațiilor de ordin mai mare ca unu se poate reduce la rezolvarea unor sisteme formate numai din ecuații diferențiale de ordinul întâi.

Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matematician francez, considerat părintele analizei moderne. A fundamentat solid analiza pe baza conceptului riguros de limită. Este de asemenea creatorul analizei complexe, în care ,,formula lui Cauchy” ocupă un loc central. Numele său este legat şi de contribuții de pionierat în domeniul ecuațiilor diferențiale şi cu derivate parțiale, în particular legate de problema existenței şi unicității. La fel ca în cazul multor mari matematicieni din secolele al XVIII şi al XIX, lucrările sale au tratat probleme din geometrie, algebră, teoria numerelor, mecanică, dar şi fizică teoretică.

Ecuații diferențiale ordinare

Se consideră o funcție $y = y(x)$, continuă şi derivabilă pe intervalul de definiție (sau cel puțin pe intervalul pe care se caută soluția, de ex.: intervalul [a, b]).

Ecuația diferențială de ordinul întâi se scrie sub ***forma implicită***:

$$\varphi(x,y,y') = 0, \quad \text{unde} \quad y' \equiv dy/dx\,,$$

unde - $x \in [a, b]$ fiind variabila independentă.

Se presupune că expresia $\varphi(x,y,y')$ se poate explicita în raport cu derivata de ordinul întâi y' obținând ***forma explicită***:

$$y' = f(x,y)$$

Funcția f(x,y) se numeşte ***funcție pantă***, deoarece în punctul de coordonate (x,y) valoarea ei este egală cu valoarea derivatei întîi a funcției y(x), numeric egală cu panta tangentei la grafic în acest punct.

Ecuații diferențiale ordinare

Pentru a determina complet soluția se dă condiția suplimentară:

$$x = x_0,\ y = y_0;\ x_0 \in [a, b],\ y_0 \in [c, d]\ ,$$

unde de obicei $x_0 = a$ sau $x_0 = b$.

Se face distincție între *metode de aproximare analitice* şi *metode discrete* (*metode cu paşi separați*) .

În cadrul primei categorii se încearcă să se găsească aproximații ale soluției exacte, valabile pentru orice $x \in [a, b]$. Acestea de obicei au forma unei dezvoltări într-o serie trunchiată, fie după puterile lui x, fie în polinoame Cebâşev, fie într-un alt sistem de funcții de bază.

În cazul metodelor discrete, se încearcă să se găsească aproximații u_n ale lui $y(x_n)$ pe o grilă de puncte $x_n \in [a, b]$. Abscisele x_n pot fi predeterminate (de exemplu puncte echidistante pe [a, b]), sau mai convenabil sunt generate dinamic ca parte a procesului de integrare. O metodă cu paşi separați (sau *metodă pas cu pas*) este o metodă care determină valoarea funcției la pasul **m+1** folosind numai valori de la pasul **m**.

Metoda Euler

Cea mai simplă metodă pas cu pas este metoda Euler de ordinul întâi. Euler a propus metoda sa în 1768, la începutul istoriei calculului diferențial şi integral. Ea constă pur şi simplu în a urma panta în punctul generic *(x,y)* pe un interval de lungime *h*.

Se considera intervalul [a,b], unde $a=x_0$ si împărțim acest interval în *n* parți egale cu nodurile $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$

Fie: $$h = \frac{b-a}{n}$$

Atunci $x_1 = x_0 + h$, iar pentru y' vom folosi următoarea formulă de derivare numerica (dezvoltată în serie Taylor):

$$y' \approx \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

Leonhard Euler (1707-1783), matematician elvețian, a urmat cursurile lui Jakob Bernoulli la Universitea din Basel, luând şi lecții particulare de la Johann Bernoulli. După ce la 20 de ani nu a reuşit să obțină o catedră de fizică la Basel, a emigrat la Sankt Petersburg; mai târziu s-a mutat la Berlin şi apoi din nou la Sankt Petersburg. Indiscutabil, Euler a fost cel mai prolific matematician al secolului al XVIII-lea, lucrând în aproape toate ramurile calculului diferențial şi integral şi fiind unul dintre fondatorii calculului variațional. A elaborat lucrări de pionierat în ştiințele aplicate: hidrodinamică, mecanica materialelor deformabile şi solidului rigid, optică, astronomie.

Metoda Euler

Din egalitatea $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ obținem:

$$y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0$$

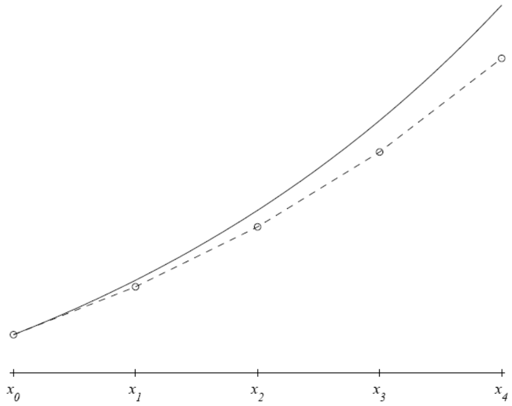
Aici valoarea y_1 va fi o valoare aproximativa pentru curba teoretica a ecuației diferențiale de ordinul unu în punctul x_1, adica $y_1 \approx y(x_1)$.

În general stiind punctul (x_k, y_k) următorul punct se obține prin formulele $x_{k+1} = x_k + h$ şi $y_{k+1} = y_k + h\, f(x_k, y_k)$.

Prin urmare pentru a rezolva numeric problema Cauchy trebuie sa întocmim tabelul:

x	x_0	x_1	$\ldots$	x_n
$y(x)$	y_0	y_1	$\ldots$	y_n

Metoda Euler



Metoda lui Euler – soluția exactă (linie continuă) și soluția aproximativă (linie punctată).

Metoda Euler

Algoritm metoda Euler

Datele de intrare: $a; b; n; f; y_0;$

Fie $h := \dfrac{b-a}{n}$; $x[0] := a$; $y[0] := y_0$;

Pentru $i = \overline{0, n-1}$ execută

$$x[i+1] := x[i] + h;$$

$$y[i+1] := y[i] + h * f(x[i], y[i]);$$

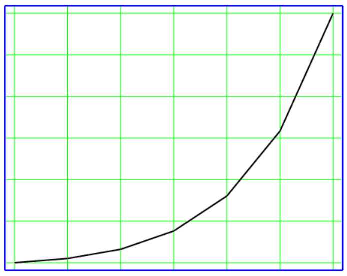
Tipăreşte $x; y$; (adică $x[i]$ şi $y[i]$ pentru $i = \overline{0, n}$).

Metoda Euler

Exemplu: $$\frac{dy}{dx} = e^x + y$$

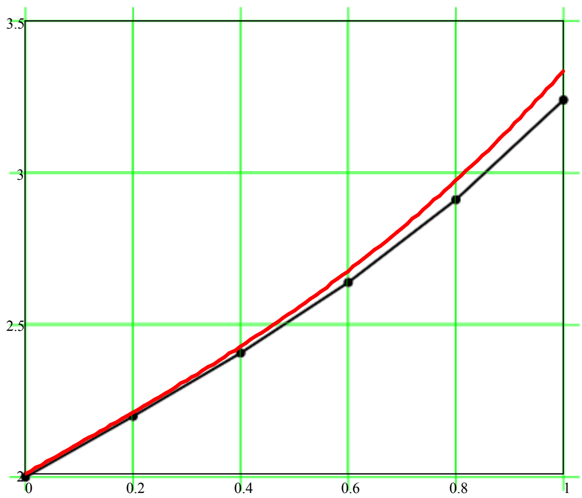
$$F(x,y) := \left| \begin{array}{l} f \leftarrow e^x + y \\ f \end{array} \right.$$

$$ME(a,b,y0,n) := \left| \begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y0 \\ h \leftarrow \dfrac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left| \begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + h \cdot F(x_i, y_i) \end{array} \right. \\ y \end{array} \right.$$



$$ME(1,4,0,6)^T = (0 \quad 1.359 \quad 4.28 \quad 10.114 \quad 21.262 \quad 41.936 \quad 79.461)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1 + x^2$$



$ME(a, b, y0, n)$

$$ME"(0,1,2,5)^T = \begin{pmatrix} 0 & 0.2 & 0.4 & 0.6 & 0.8 & 1 \\ 2 & 2.2 & 2.408 & 2.64 & 2.912 & 3.24 \end{pmatrix}$$

Metoda Runge-Kutta

Această clasă de metode reprezintă una dintre cele mai folosite în abordarea numerică a ecuațiilor diferențiale, îmbinând numărul relativ redus de operații elementare cu acuratețea rezultatelor.

Metoda Runge-Kutta de ordinul II constă în găsirea constantelor *a, b,* α, β astfel încât expresia:

$$y_{n+1} = y_n + a k_1 + b k_2$$

cu:

$$k_1 = h f(x_n, y_n),$$

$$k_2 = h f(x_n + \alpha h, y_n + \beta k_1).$$

să se apropie de dezvoltarea în serie Taylor pentru cât mai mulți termeni posibili.

Carle David Tolme Runge (1856-1927), matematician german, membru al şcolii matematice de la Gotingen şi unul dintre pionierii matematicii numerice. Este cunoscut pentru metodele Runge-Kutta din domeniul rezolvării numerice a ecuațiilor diferențiale ordinare, ale căror idei de bază i se datorează. A avut contribuții notabile şi în domeniul aproximărilor în planul complex.

Wilhelm Martin Kutta (1867-1944), matematician german, cu preocupări în domeniul matematicilor aplicate. Cunoscut pentru lucrările sale în domeniul rezolvării numerice a ecuațiilor diferențiale ordinare, a avut şi contribuții la aplicarea transformărilor conforme la probleme de hidro şi aerodinamică (formula Kutta-Jukovski).

Metoda Runge-Kutta

Meritul principal al acestei clase de metode rezidă deci în aceea că se apropie de acuratețea unei dezvoltări în serie Taylor fără însă a fi nevoie să se calculeze şi derivatele de ordin superior.

Se poate constata că metoda Euler este de fapt o procedură Runge-Kutta de ordinul I.

O acuratețe mare are Metoda Runge-Kutta de ordinul IV, care utilizează derivate calculate la capete şi la jumătatea pasului. Aceasta are forma:

$$y_{n+1}=y_n+\frac{1}{6}\left(k_1+2k_2+2k_3+k_4\right)$$

$$k_1=hf\left(x_n,y_n\right),\quad k_2=hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_1\right),\quad k_3=hf\left(x_n+\frac{1}{2}h,y_n+\frac{1}{2}k_2\right),\quad k_4=hf\left(x_n+h,y_n+k_3\right)$$

Metoda Runge-Kutta

Algoritmul metoda Runge-Kutta

Datele de intrare: $a; b; n; f; y_0;$

Fie $h := \dfrac{b-a}{n}$; $x[0] := a$; $y[0] := y_0$;

Pentru $i = \overline{0, n-1}$ execută

$x[i+1] := x[i] + h;$

$K_1 := h * f(x[i], y[i]);$

$K_2 := h * f\left(x[i] + \dfrac{h}{2}, y[i] + \dfrac{K_1}{2}\right);$

$K_3 := h * f\left(x[i] + \dfrac{h}{2}, y[i] + \dfrac{K_2}{2}\right);$

$K_4 := h * f(x[i] + h, y[i] + K_3);$

$y[i+1] := y[i] + \frac{1}{6} * (K_1 + 2 * K_2 + 2 * K_3 + K_4);$

Tipăreşte $x; y;$

Metoda Runge-Kutta

Exemplu:

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} + y$$

$$F(x,y) := \left|\begin{array}{l} f \leftarrow e^{x} + y \\ f \end{array}\right.$$

$$MRC2(a,b,y0,n) := \left|\begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y0 \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ K1 \leftarrow h \cdot F(x_i, y_i) \\ K2 \leftarrow h \cdot F(x_i + h, y_i + K1) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + \frac{1}{2} \cdot (K1 + K2) \end{array}\right. \\ y \end{array}\right.$$

$$MRC4(a,b,y0,n) := \left|\begin{array}{l} x_0 \leftarrow a \\ y_0 \leftarrow y0 \\ h \leftarrow \frac{b-a}{n} \\ \text{for } i \in 0..n-1 \\ \quad \left|\begin{array}{l} x_{i+1} \leftarrow x_i + h \\ K1 \leftarrow h \cdot F(x_i, y_i) \\ K2 \leftarrow h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K1}{2}\right) \\ K3 \leftarrow h \cdot F\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{K2}{2}\right) \\ K4 \leftarrow h \cdot F(x_i + h, y_i + K3) \\ y_{i+1} \leftarrow y_i + \frac{1}{6} \cdot (K1 + 2 \cdot K2 + 2 \cdot K3 + K4) \end{array}\right. \\ y \end{array}\right.$$

$$MRC2(1,4,0,6)^{T} = (0 \quad 2.14 \quad 7.005 \quad 17.2 \quad 37.539 \quad 76.812 \quad 150.888)$$

$$MRC4(1,4,0,6)^{T} = (0 \quad 2.239 \quad 7.383 \quad 18.258 \quad 40.133 \quad 82.704 \quad 163.613)$$

Întrebări ?